

Leuvense deelnames aan de IMC

De International Mathematics Competition for University Students, kortweg IMC, is een jaarlijkse wiskundecompetitie voor universiteitsstudenten. De wedstrijd is individueel en bestaat uit twee sets van vijf of zes problemen, waarvoor telkens vijf uur tijd gegeven is. Na elk competitie-moment worden de vragen verbeterd en 's nachts worden de voorlopige punten al gepubliceerd. Een excursiedag en een vergadering van de wedstrijdjury later wordt het definitieve klassement bekend gemaakt op een proclamatie, waarna een afscheidsdiner en de terugreis volgen. De deelnemers worden ook nog in groepen opgedeeld, afhankelijk van het aantal behaalde punten: First Prizes (ongeveer één zesde van de deelnemers), Second Prizes, Third Prizes (elk ongeveer een kwart van de deelnemers), Honourable Mentions en Certificates. Tenslotte is er ook nog een nevenklassement voor teams: de score van een team is de som van de beste drie scores van het team en het gemiddelde. De deelnemers komen van over heel de wereld: zo goed als alle Europese landen hebben al teams gestuurd, evenals de VS, een heleboel Zuid-Amerikaanse landen en een aantal Afrikaanse en Aziatische landen.

De eerste keer dat een Leuven team deelnam aan de IMC was in 2008, in Blagoevgrad, Bulgarije. Het onverwachte overlijden van Arne Loosveldt reduceerde het team tot twee leden: Christophe Debry (eerste bachelor) en Stijn Vermeeren (derde bachelor). De competitie bestond toen nog uit twee keer zes vragen, elk op 20 punten, en beide deelnemers haalden een Third Prize. Op een totaal van 283 deelnemers werd Christophe 159ste en Stijn 104de, op amper twee punten van een Second Prize. Leuven werd toen niet opgenomen in het teamklassement omdat er niet genoeg deelnemers waren.

Een jaar later ging de IMC door in Boedapest, Hongarije, maar – hoewel het Arne Loosveldt fonds intussen opgericht was – geen enkele Leuvense student nam deel. Wel participeerde er voor het eerst een volwaardig Gents team. Het aantal vragen werd gereduceerd tot twee keer vijf, een beslissing die de druk op de deelnemers heel wat vermindert. Dit zou ook het geval zijn voor de volgende twee edities.

In 2010 trok de IMC weer naar Blagoevgrad, en er waren 328 deelnemers. Na een jaartje afwezigheid deed er opnieuw een team uit Leuven mee, bestaande uit Christophe Debry (derde bachelor), Mats Vermeeren (eerste bachelor) en Peter Verraedt (derde bachelor). Dit waren de Leuvense resultaten:

Plaats	Deelnemer	Dag 1	Dag 2	Totaal	Prijs
45	Christophe Debry	10+9+0+10+0	10+10+1+0+0	50	First Prize
246	Mats Vermeeren	10+4+1+0+0	6+0+1+1+0	23	Honourable Mention
288	Peter Verraedt	10+0+0+0+0	7+1+0+0+0	18	Honourable Mention

Ook Gent stuurde een team, met vier deelnemers die op plaatsen 78 (Second Prize), 190 (Third Prize), 214 (Third Prize) en 262 (Honourable Mention) eindigden. Utrecht behaalde drie Second Prizes, twee Third Prizes en één Honourable Mention. Er waren 90 universiteiten vertegenwoordigd en in het teamklassement werd Leuven 45ste, na zowel Gent (41ste) als Utrecht (30ste).

Dit jaar ging de IMC opnieuw door in Blagoevgrad en er kwamen 305 studenten zich buigen

over tien problemen. Leuven stuurde een team van vier deelnemers: Hans Baumers (eerste master), Christophe Debry (eerste master), Heide Goethals (eerste bachelor Kortrijk) en Mats Vermeeren (tweede bachelor). Met twee masterstudenten en twee bachelorstudenten die heel wat wedstrijddervaring hebben, zag het er naar uit dat Leuven wel eens kon meedoen voor een hoge positie in het teamklassement. Ook de andere Belgische teams waren erg sterk: Gent had hun Second Prize van 2010 weer mee, en de ULB stond er (voor het eerst) met zeven deelnemers, waaronder 4 ex-IMO'ers. In totaal waren er maar liefst 16 Belgische deelnemers, in contrast met de twee Belgen uit 2008. Dag 1 verliep goed voor de Leuvense masterstudenten: elk losten ze drie van de vijf vragen op en stonden daarmee al erg hoog in de voorlopige rangschikking. De andere (Leuvense en Gentse) deelnemers losten hoogstens één vraag volledig op, dus het vermoeden was dat dag 2 gemakkelijker ging worden. De jury bleek echter dag 2 bewust moeilijker gemaakt te hebben, maar dan vooral vanaf vraag 3. De schade viel dus wel mee: gemiddeld losten de deelnemers anderhalve vraag op op de tweede dag. Dit waren de finale resultaten:

Plaats	Deelnemer	Dag 1	Dag 2	Totaal	Prijs
21	Christophe Debry	10+10+10+0+0	10+10+10+0+0	60	First Prize
50	Hans Baumers	10+9+10+0+0	10+3+1+0+1	44	Second Prize
222	Mats Vermeeren	8+5+0+0+0	9+3+0+0+0	25	Honourable Mention
281	Heide Goethals	10+0+0+0+0	2+3+0+0+0	15	Honourable Mention

Christophe en Hans stonden het hoogst gerangschikt van alle Benelux-deelnemers. Brussel haalde twee Second Prizes, één Third Prize, drie Honourable Mentions en één Certificate. Gent moest het stellen met vijf maal een Honourable Mention, maar de eerlijkheid gebiedt te zeggen dat ze met een beetje meer geluk veel beter hadden kunnen scoren. Ook binnen het Leuvense team kon het nóg mooier worden: de cut-offs lagen op 50, 34, 26 en 13, dus Mats greep net naast een Third Prize. In het teamklassement deed Leuven het ongelooflijk goed: op 77 teams werd Leuven 14de (ter vergelijking: Princeton stond op plaats 11), vóór Utrecht (21ste), de ULB (30ste) en Gent (57ste).

Het Leuvense team begint solide te worden, de resultaten zijn er, de sfeer op deze internationale competitie is onbeschrijfbaar, de gezellige dagen en nachten met de andere Belgische teams zijn onvergetelijk en het is ieder jaar opnieuw een ervaring. Ik denk dat het fonds dat naar Arne vernoemd is, haar doel bereikt: de evenementen ondersteunen waar ook hij plezier aan beleefde. Volgend jaar – geruchten doen de ronde dat we naar Moskou trekken – nog beter!

Extra informatie op imc-math.org

Bijlage: de vragen van IMC 2011

Dag 1

- (1) Zij $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ een continue functie. Een punt x heet een *schaduwpunt* als er een $y \in \mathbb{R}$ bestaat met $y > x$ en $f(y) > f(x)$. Stel dat a en b reële getallen zijn met $a < b$ en zodat alle punten in het open interval (a, b) schaduwpunten zijn, maar a en b niet.

(a) Bewijs dat $f(x) \leq f(b)$ voor alle $x \in (a, b)$.

(b) Bewijs dat $f(a) = f(b)$.

- (2) Bestaat er een reële 3×3 -matrix A met spoor 0 die voldoet aan $A^2 + A^t = I_3$?

- (3) Zij p een priemgetal. We noemen een $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *interessant* als er veeltermen $f(X), g(X) \in \mathbb{Z}[X]$ bestaan zodat

$$X^n - 1 = (X^p - X + 1)f(X) + pg(X).$$

(a) Bewijs dat $p^p - 1$ interessant is.

(b) Voor welke p is $p^p - 1$ het kleinste interessante getal?

- (4) Zijn A_1, A_2, \dots, A_n eindige, niet-lege verzamelingen. Toon aan dat de functie

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} (-1)^{k-1} t^{|A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_k}|}$$

(niet noodzakelijk strikt) stijgt op $[0, 1]$.

- (5) Zij n een natuurlijk getal en V een vectorruimte van dimensie $2n - 1$ over het veld \mathbb{F}_2 met twee elementen. Bewijs dat er voor willekeurige $v_1, v_2, \dots, v_{4n-1} \in V$ steeds natuurlijke getallen $1 \leq i_1 < \dots < i_{2n} \leq 4n - 1$ bestaan zodat $v_{i_1} + \dots + v_{i_{2n}} = 0$.

Dag 2

- (1) Zij $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een rij van reële getallen zodat $\frac{1}{2} < a_n < 1$ voor alle n . Definieer een rij $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ door $x_0 = a_0$ en

$$x_{n+1} = \frac{a_{n+1} + x_n}{1 + a_{n+1}x_n}$$

voor $n \geq 0$. Bepaal alle mogelijke waarden van $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Convergeert zo'n rij $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ altijd?

- (2) Een buitenaards ras heeft drie geslachten: male, female en emale. Een *getrouwd tripel* bestaat uit drie personen, van elk geslacht één, die allemaal van elkaar houden. Een wezen mag hoogstens tot één getrouwd tripel behoren. We gaan er verder van uit dat "houden van" een wederzijds gevoel is.

Het ras zendt een expeditie uit om een andere planeet te koloniseren. Er gaan n males, n females en n emales mee. Elk lid van de expeditie houdt van minstens k personen van elk van de andere twee geslachten. De bedoeling is om zoveel mogelijk getrouwde tripels te vormen.

- (a) Toon aan dat als n even is en $k = \frac{n}{2}$, het zelfs niet altijd mogelijk is om één getrouwd tripel te vormen.
- (b) Toon aan dat als $k \geq \frac{3n}{4}$, het altijd mogelijk is om n disjuncte getrouwde tripels te vormen en zo alle expeditieleden te trouwen.

(3) Bepaal

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{2n} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{2n+1} \right).$$

- (4) Zij f een veelterm met reële coëfficiënten, van graad n . Veronderstel dat $\frac{f(x) - f(y)}{x - y}$ een geheel getal is voor alle $0 \leq x < y \leq n$. Bewijs voor alle verschillende gehele getallen a en b dat $\frac{f(a) - f(b)}{a - b}$ een geheel getal is.
- (5) Zij $F = A_0 A_1 \cdots A_n$ een convexe veelhoek in het vlak. Definieer voor elke $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ de operatie f_k die F vervangt door de nieuwe veelhoek

$$f_k(F) = A_0 A_1 \cdots A_{k-1} A'_k A_{k+1} \cdots A_n,$$

waarbij A'_k de spiegeling van A_k is ten opzichte van de middelloodlijn van $[A_{k-1} A_{k+1}]$. Bewijs dat $(f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_{n-1})^n(F) = F$. We gaan er wel van uit dat alle operaties goed gedefinieerd zijn op de veelhoeken waar ze op toegepast worden, i.e., de resultaten zijn opnieuw convex.